



دخترچه سؤالات و پاسخ تشریحی

مرحله اول

نوزدهمین دوره المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۵

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۸۰	-	۳۰

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

- ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:
- این آزمون شامل **۳۰ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- یک مکعب $7 \times 7 \times 7$ را که شامل 7^3 مکعب "کوچک" $1 \times 1 \times 1$ است در نظر بگیرید. هر مکعب کوچک آن را با رنگ سفید یا سیاه طوری رنگ می‌کنیم که هر دو مکعب کوچک مجاور هم‌رنگ نباشند. دو مکعب کوچک را مجاور می‌گوییم اگر در یک وجه (مربع) مشترک باشند. فرض کنید که رنگ آمیزی ما طوری است که ۸ مکعب کوچک واقع در گوشه‌های مکعب اصلی رنگ سفید دارند.

در مجموع چند مکعب کوچک سیاه وجود دارد که حداقل یک وجه آن دیده شود؟

- الف) ۱۰۶ (ب) ۱۱۴ (ج) ۱۱۰ (د) ۱۰۲ (ه) ۱۰۸

۲- به چند طریق می‌توان اعداد مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, 20\}$ را با رنگ‌های قرمز و آبی رنگ آمیزی کرد به طوری که اگر اعداد متفاوت a و b هم‌رنگ باشند و $a + b \leq 20$ ، در این صورت عدد $a + b$ نیز از همان رنگ باشد؟

- الف) ۲ (ب) ۴ (ج) ۶ (د) ۸ (ه) ۱۰

۳- در یک بازی دو نفره با سعید شرکت کرده‌اید. سعید از شما می‌خواهد که یک عدد چند رقمی به نام x را انتخاب کنید؛ معکوس آن عدد (یا \bar{x}) را از روی x بسازید (مثلاً معکوس 10240 ، 4201 است) و سپس $a = x - \bar{x}$ را حساب کنید و علامت آن را نادیده بگیرید. شما باید یک رقم غیر صفر a به نام p را انتخاب کنید و آن را به خاطر بسپارید، و جمع بقیه‌ی ارقام a را به سعید اعلام کنید. سعید می‌تواند از این اطلاعات، p را به دست آورد!

اگر مقدار اعلام شده ۳۱ باشد، p چه عددی است؟

- الف) ۵ (ب) ۷ (ج) ۹ (د) ۱ (ه) ۳

۴- مجموعه‌ی $\{6, 7, 12, 13, 21, 25, 30, 31\}$ چند زیر مجموعه دارد که حاصل جمع اعداد آن زوج است؟

- الف) ۱۶ (ب) ۳۲ (ج) ۶۴ (د) ۹۶ (ه) ۱۲۸

۵- بازی k -اتل مثل (که k عددی مثبت است) با حضور ۲۰ بازی‌کن انجام می‌شود. این بازی‌کنان با شماره‌های ۱ تا ۲۰ به ترتیب شماره‌شان و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دور یک دایره و به سمت داخل نشسته‌اند. نخست یک پرچم به دست فرد شماره‌ی ۱ می‌دهیم. در هر مرحله k بار پرچم دست به دست می‌شود. هر بار دست به دست شدن پرچم به این معنی است که فردی که پرچم را در دست دارد آن را به فرد سمت راستی خود می‌دهد. در پایان هر مرحله، فردی که پرچم را در دست دارد از بازی حذف و از دور دایره خارج می‌شود و پرچم را به فرد سمت راستی خود می‌دهد.

می‌خواهیم به ترتیب (از راست به چپ) افراد با شماره‌های ۳، ۱۹، ۱۷، ۲۰، ۱۶، ۸، ۱، ۱۱، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۳، ۷، ۱۴، ۶، ۲، ۱۰، ۴، ۵ و ۱۸ حذف شوند. کم‌ترین k ای که به ازای آن بازی k -اتل مثل موجب حذف افراد به ترتیب ذکر شده شود را k می‌نامیم. باقی‌مانده‌ی k بر ۵ چند خواهد بود؟

- الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

۶- در شکل مقابل به چند طریق می‌توان سه مثلث با ضلع به طول ۱ انتخاب کرد به طوری که مثلث‌های انتخاب شده در رأس و ضلع با یک‌دیگر اشتراک نداشته باشند. فرض کنید مثلث اصلی دارای اضلاع به طول ۳ است و تمام خطوط رسم شده موازی اضلاع مثلث اصلی می‌باشند.



- الف) ۱ (ب) ۳ (ج) ۲ (د) ۷ (ه) ۸

۷- در شکل مسئله‌ی شماره‌ی ۶، اگر به لا طریق بتوان مثلث‌های به ضلع ۱ که در ضلع اشتراک ندارند) و می‌توانند در رأس اشتراک داشته باشند) را انتخاب کرد، باقی‌مانده‌ی لا بر ۵ چند است؟

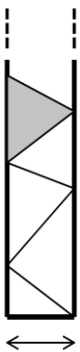
- الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۸- در یک جدول 3×3 ، یک اسب شطرنج در خانه‌ی وسط ستون سمت چپ قرار دارد. در هر مرحله، در یکی از ۸ خانه‌ی کناری جدول که اسب در آنجا نیست یک سرباز قرار می‌دهیم. سپس، اسب از خانه‌ای هست با کم‌ترین تعداد حرکت خود را به سرباز می‌رساند و آن را می‌خورد. یک حرکت اسب مانند حرف L است.

می‌خواهیم مرحله‌ی فوق را ۱۳۸۷ بار تکرار کنیم، و در هر مرحله سرباز را در جایی بگذاریم که اسب در مجموع بیش‌ترین تعداد حرکت را انجام دهد. اگر تعداد بیشینه‌ی حرکت اسب را X بنامیم، باقیمانده‌ی X بر ۵ چند خواهد بود؟

- الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۹- یک قاب به عرض ۱ واحد و ارتفاع نامحدود بر روی زمین قرار گرفته است. ما ۱۰ قطعه چوب بسیار باریک با طول‌های ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹ و تعداد زیادی لولا داریم. می‌خواهیم به ترتیبی قطعات چوب را با لولا از انتها به یک‌دیگر وصل کنیم تا زنجیره‌ای به‌دست آید و آن زنجیره را درون قاب قرار دهیم. نحوه‌ی قرار گرفتن زنجیره در قاب طوری است که دو سر هر قطعه چوب بر روی یکی از دو دیوار کناری قاب قرار گیرد. هم‌چنین، می‌دانیم که یک سر پایین‌ترین چوب بر ضلع افقی (کف) قاب قرار دارد. بدین ترتیب در شکل حاصل بین قطعات چوب و ضلع‌های قاب مثلث‌هایی (و یک ناحیه نامتناهی) پدید خواهد آمد.



هدف این است که به ترتیبی قطعات چوب را به هم وصل کنیم که جمع مساحت مثلث‌ها بیشینه شود. در این ترتیب طول بالاترین چوب کدام است؟

در شکل روبه‌رو چوب‌ها با خطوط نازک، قاب با خطوط کلفت و یکی از مثلث‌های حاصله به صورت خاکستری نمایش داده شده است.

- الف) ۲ ب) ۵ ج) ۱۱ د) ۱۷ ه) ۲۹

۱۰- در شکل روبه‌رو یک جدول کامل 1×8 نمایش داده شده است. با حذف دقیقاً یکی از اضلاع (افقی یا عمودی) به طول ۱ از یک جدول کامل، یک جدول ناقص به‌دست می‌آید. برای مثال، در این شکل ۲۵ ضلع وجود دارد که با حذف هر کدام، یک جدول ناقص تولید می‌شود.

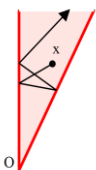


قیمت یک جدول ناقص برابر است با تعداد مسیرهای به طول ۹ که از نقطه‌ی پایین سمت چپ به نقطه‌ی بالای سمت راست و فقط با عبور از ضلع‌ها به‌دست می‌آید.

فرض کنید S مجموعی تمام قیمت‌های جداول ناقص است. باقی‌مانده‌ی تعداد اعضای غیر تکراری S بر ۵ چند است؟

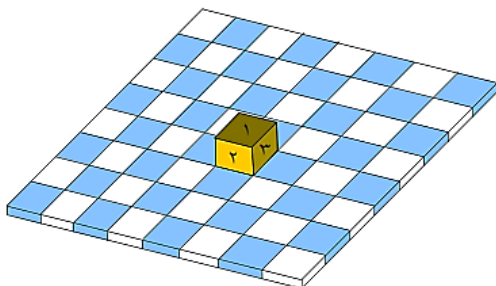
- الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۱- دو آینه‌ی متقاطع داریم که زاویه‌ی بین‌شان 30° درجه است. محل تقاطع را O می‌نامیم. این آینه‌ها از یک‌طرف تا بینهایت ادامه دارند. از یک نقطه‌ی X در داخل این آینه‌ها، شعاع نوری را طوری می‌تابانیم که از O نگذرد. این شعاع حداکثر چند بار با آینه‌ها می‌تواند برخورد کند؟



- الف) ۵ ب) ۶ ج) ۱۲ د) ۳۰ ه) بینهایت

۱۲- یک مکعب با وجه‌های شماره‌ی ۱ تا ۶ به شکل روبه‌رو بر صفحه‌ی شطرنج قرار گرفته است، به طوری که وجه ۴ روبه روی وجه ۱، وجه ۵ روبه روی وجه ۲ و وجه ۶ روبه روی وجه ۳ قرار دارد. در ابتدا وجه ۱ در بالا قرار دارد. در هر مرحله می‌توانیم مکعب را بر روی یکی از اضلاع آن بر خانه‌ی مجاور در صفحه‌ی شطرنج بغلطانیم. با چند بار انجام این کار مکعب را به خانه‌ی گوشه‌ی بالا و سمت راست صفحه رسانده‌ایم. در این وضعیت چند وجه می‌توانند در بالای مکعب قرار بگیرند؟



- الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۶

۱۳- مجموعه‌ی همه‌ی انسان‌ها، از آغاز تاریخ تاکنون را M بنامید. اگر مجموع تعداد فرزندان اعضای M برابر n و مجموع تعداد نوه‌های اعضای M برابر n' باشد، $\frac{n'}{n}$ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

- الف) ۴ (ب) ۲ (ج) $\frac{3}{2}$ (د) ۱ (ه) $\frac{1}{2}$

۱۴- علی و امیر هر کدام چهار عدد متمایز از بین اعداد $\{4, 5, 7, 8, 12, 13, 14, 23, 24\}$ را انتخاب کرده است، به طوری که همه‌ی اعداد علی متفاوت از اعداد امیر هستند. مجموع اعداد انتخابی علی سه برابر مجموع اعداد انتخابی امیر است. عدد انتخاب نشده کدام است؟

- الف) ۴ (ب) ۷ (ج) ۱۳ (د) ۱۴ (ه) ۲۳

۱۵- شکل زیر نواری از خانه‌ها را نشان می‌دهد که تعدادی از آن‌ها که سیاه شده‌اند. مهره‌ای از خانه‌ی ابتدای سمت چپ نوار شروع به حرکت می‌کند و در هر گام به اندازه‌ی یک یا دو خانه به جلو می‌جهد، به شرطی که خانه‌ی مقصد سیاه نباشد. مهره به چند طریق می‌تواند به انتهای نوار برسد؟



- الف) ۱۲۰ (ب) ۱۳۰ (ج) ۱۴۰ (د) ۱۵۰ (ه) ۱۶۰

۱۶- شرکت ماشین‌سازی "محسن و دوستان" می‌خواهد قیمت ماشین خود را طوری تعیین کند که بیش‌ترین سود را در بازار ببرد. هزینه تولید یک ماشین برای این شرکت ۸ تومان است. در بازار، ۱۰ نفر وجود دارند که متقاضی خرید ماشین هستند و ارزش ماشین نزد آن‌ها به ترتیب ۳۰، ۲۶، ۲۳، ۲۰، ۱۸، ۱۶، ۱۴، ۱۲، ۱۰، ۷ تومان است. هر نفر در صورتی ماشین را می‌خرد که قیمت پیشنهادی از ارزش ماشین نزد او بیش‌تر نباشد. هم‌چنین هر نفر بیش از یک ماشین خریداری نمی‌کند.

در این شرایط شرکت "محسن و دوستان" می‌خواهد قیمتی برای فروش ماشین پیشنهاد کند که بیش‌ترین سود را ببرد. اگر هزینه‌ی تولید ماشین را از میزان پولی که شرکت از افراد دریافت می‌کند کم کنید، میزان سود شرکت به‌دست می‌آید. برای مثال اگر قیمت فروش ماشین ۱۳ تومان باشد، ۷ نفر آن را با قیمت ۱۳ تومان خریداری می‌کنند و سود شرکت برابر

$$35 = 7 \times 8 - 13 \times 7 \text{ تومان خواهد شد.}$$

- الف) ۱۲ (ب) ۱۴ (ج) ۱۶ (د) ۱۸ (ه) ۲۳

۱۷- یک رشته به طول ۱۰ از حروف A، B و C را در نظر بگیرید. به دو حرف متوالی یکسان در این رشته "توالی یکسان" می‌گوییم. رشته‌ای که دقیقاً سه "توالی یکسان" داشته باشد یک رشته "خوب" است. برای مثال AAAABCBCB و CABBCCABCC دو رشته‌ی "خوب" هستند. تعداد رشته‌های "خوب" به طول ۱۰ چند تاست؟

- (الف) $21 \times 3 \times 2^8$ (ب) $35 \times 3 \times 2^6$ (ج) $35 \times 3 \times 2^7$ (د) $15 \times 3 \times 2^8$ (ه) $21 \times 3 \times 2^7$

۱۸- دو عدد ۱ روی تخته سیاه نوشته شده است. شما می‌توانید یکی از سه کار زیر را بر روی این اعداد انجام دهید.

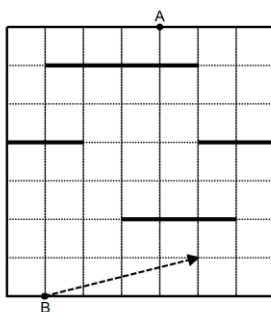
- عملیات "دو برابر": یکی از اعداد روی تخته سیاه را پاک کنید و دو برابر آن را بنویسید.
- عملیات "سه برابر": یکی از اعداد روی تخته سیاه را پاک کنید و سه برابر آن را بنویسید.
- عملیات "جمع": دو تا از اعداد روی تخته سیاه را پاک کنید و جمع آن‌ها را بنویسید.

هدف این است با کم‌ترین تعداد استفاده از عملیات "سه برابر"، عدد X روی تخته سیاه نوشته شود. این کم‌ترین تعداد را Π_x می‌نامیم. برای مثال، $\Pi_9 = 0$ خواهد بود. چون بدون استفاده از عملیات "سه برابر" می‌توان عدد ۳ را با یک‌بار استفاده از عملیات "دو برابر" و یک بار استفاده از عملیات "جمع" نوشت.

Π_3 و Π_4 کدام هستند؟

- (الف) $\Pi_3 = 2, \Pi_4 = 0$ (ب) $\Pi_3 = 1, \Pi_4 = 1$ (ج) $\Pi_3 = 0, \Pi_4 = 1$ (د) $\Pi_3 = 0, \Pi_4 = 0$ (ه) $\Pi_3 = 1, \Pi_4 = 0$

۱۹- نوری دقیقاً با زاویه‌ای که در شکل مشخص شده و از نقطه‌ی B وارد یک اتاق می‌شود. خطوط افقی نشان داده شده در شکل و دیوارها مانع نور هستند. از شما خواسته شده است که تعدادی آینه با زاویه‌های دل‌خواه در داخل اتاق قرار دهید تا با استفاده از آن‌ها نور به نقطه‌ی A تابانده شود. حداقل تعداد این آینه‌ها چند تاست؟



- (الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۶

۲۰- ۱۶ تیم در مسابقات جام حذفی و لیگ شرکت کرده‌اند. می‌دانیم که اگر تیم "الف" از تیم "ب" قوی‌تر باشد هر بار که تیم "الف" با تیم "ب" بازی کند برنده خواهد شد. هم‌چنین می‌دانیم اگر تیم "الف" از تیم "ب" قوی‌تر باشد و تیم "ب" از تیم "ج" قوی‌تر باشد در این صورت تیم "الف" نیز حتماً از تیم "ج" قوی‌تر خواهد بود. مسابقات جام حذفی و لیگ به صورت زیر برگزار می‌شوند:

- مسابقات جام حذفی: در این مسابقات در مرحله اول ۸ مسابقه انجام می‌شود و هر تیم در یک بازی شرکت می‌کند. تیم‌های بازنده از مسابقات حذف می‌شوند و ۸ تیم پیروز به مرحله بعد راه پیدا می‌کنند. در مرحله دوم، ۴ بازی انجام می‌شود و تیم‌های پیروز به مرحله بعد می‌روند. در مرحله سوم که مرحله نیمه نهایی است ۲ بازی انجام می‌شود و تیم‌های پیروز به فینال راه پیدا می‌کنند. تیم برنده‌ی فینال قهرمان جام حذفی و تیم بازنده‌ی فینال نایب قهرمان است.

• مسابقات لیگ: در این مسابقات هر دو تیم یکبار با هم بازی می‌کنند و به تیم برنده هر بازی ۳ امتیاز و به تیم بازنده ۰ امتیاز داده می‌شود. در انتها تیم‌ها را با توجه به امتیاز آن‌ها مرتب کرده و رتبه هر تیم معلوم می‌شود. دقت کنید که نتیجه‌ی مساوی در این مسابقات نداریم. پایین‌ترین (بدترین) رتبه‌ای که تیم نایب قهرمان مسابقات جام حذفی در مسابقات لیگ می‌تواند داشته باشد چه رتبه‌ای است؟

- (الف) دوم (ب) سوم (ج) پنجم (د) نهم (ه) سیزدهم

۲۱- به دلیل گرد بودن کره‌ی زمین، شهرهای مختلف آن با هم اختلاف ساعت دارند. به طور مثال تهران با پاریس ۲:۳۰ ساعت و با سئول ۵:۳۰ ساعت اختلاف زمانی دارد. سئول در شرق تهران و پاریس در غرب آن قرار دارد. توجه کنید که به علت گرد بودن زمین دو شهر نمی‌توانند بیش از ۱۲ ساعت اختلاف زمانی داشته باشند.

فرض کنید شهر A با B ۵ ساعت، B با C ۴ ساعت، C با D ۳ ساعت و D با E ۷ ساعت اختلاف زمانی دارند. اختلاف زمانی شهر A با E کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

- (الف) ۱ ساعت (ب) ۳ ساعت (ج) ۵ ساعت (د) ۷ ساعت (ه) ۹ ساعت

۲۲- عدد دو رقمی دهدهی AB با مقدار $10A + B$ مفروض است. مقادیر رقم A از مجموعه‌ی بدون صفر $\{1, 2, \dots, 5\}$ و مقادیر رقم B از مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ انتخاب می‌شوند. فرض کنید کمینه‌ی مقدار ممکن AB برابر X و بیشینه‌ی مقدار ممکن برای AB برابر Y باشد. مطلوب است تعداد اعداد متمایز بزرگ‌تر از X و کوچک‌تر از Y که AB نمی‌تواند برابر آن‌ها باشد.

- (الف) ۰ (ب) ۲ (ج) ۱۰ (د) ۱۲ (ه) ۱۴

۲۳- در هریک از ۹ خانه‌ی یک جدول 3×3 ، یکی از ۹ حرف اول انگلیسی (غیر تکراری) را به ترتیب دل‌خواهی نوشته‌ایم. روباتی از یک خانه جدول شروع و به صورت افقی یا عمودی در جدول حرکت می‌کند و در هر مرحله از خانه‌ای که هست به یکی از خانه‌های مجاورش می‌رود. دو خانه مجاورند اگر در یک ضلع مشترک باشند. روبات پس از ورود به هر خانه حرف نوشته شده در آن را اعلام می‌کند. اگر حروف اعلام شده (از چپ به راست) به صورت رشته‌ی CACIDEFIDHBEFEDAGACAGHBEFI باشد، حرف خانه وسط جدول کدام است؟

- (الف) A یا B (ب) C یا D (ج) E (د) F یا G (ه) H یا I

۲۴- عمل ضرب یک رقم دهدهی a در یک عدد دهدهی n رقمی $X = x_{n-1}x_{n-2}\dots x_1x_0$ را به صورت زیر انجام می‌دهیم: ابتدا تمام حاصل ضرب‌های $10^i \times x_i \times a$ را برای $1 \leq i \leq n$ به دست می‌آوریم. سپس n حاصل ضرب به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم. این عمل جمع برای کدام مقدار a هیچ‌گاه (یعنی به ازای تمام مقادیر X) ده بر یک (یا رقم نقلی) نخواهد داشت؟

- (الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۹

۲۵- یک حشره در خانه‌ی گوشه‌ی پایین و سمت چپ یک مربع 7×7 نشسته است. در هر جهش یکی از سه کار زیر را انجام می‌دهد:

- دو واحد به سمت راست می‌پرد،
 - دو واحد به سمت بالا می‌پرد، یا
 - با یک پرش ۴۵ درجه‌ای، یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا می‌پرد.
- دقت کنید که این حشره با دقیقاً ۶ جهش به خانه‌ی گوشه‌ی بالا سمت راست مربع می‌رسد. تعداد دنباله‌های مختلف جهش که حشره را به خانه‌ی گوشه‌ی بالا سمت راست مربع می‌رساند چند تا است؟

- (الف) ۳۶ (ب) ۶۴ (ج) ۲۷۶ (د) ۱۰۱ (ه) ۱۴۱

۲۶- ماگ به ازای هر دو عدد صحیح بین 0 تا $1 - 2^{10}$ که اختلاف آن دو دقیقاً 2^6 است، یک پاره‌خط بین نقاط متناظر این دو عدد روی محور X ها رسم می‌کنیم. می‌خواهیم از این پاره‌خطها زیر مجموعه‌ای مانند S انتخاب کنیم که هریک از نقاط محور حداکثر روی یکی از پاره‌خطهای عضو S باشد. فرض می‌کنیم نقاط دو سر هر پاره‌خط روی آن قرار ندارند. S حداکثر می‌تواند چند عضو داشته باشد؟

(الف) ۴ (ب) ۸ (ج) ۳۲ (د) ۶۴ (ه) ۲۵۶

۲۷- ماگ فرض کنید A کوچک‌ترین عدد بزرگ‌تر از ۱۳۸۷ است که بر ۷ بخش‌پذیر بوده و رقم‌های آن (در مبنای 10) فقط از ۱ و ۲ تشکیل شده‌اند. تعداد رقم‌های A چند است؟

(الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) ۸

۲۸- ماگ در یک ردیف ۱۳۸۷ میله‌ی موازی از راست به چپ با شماره‌های ۱ تا ۱۳۸۷ قرار دارند. در ابتدا ۱۳۸۷ مهره در میله ۱ قرار دارد. در هر حرکت از یک میله دل‌خواه ۳ مهره بر می‌داریم و یکی را دور انداخته، یکی را به همان میله بر می‌گردانیم و سومی را در میله سمت چپ می‌اندازیم. این کار را تا جایی تکرار می‌کنیم که در هیچ میله‌ای بیش از ۲ مهره نداشته باشیم. بیش‌ترین شماره‌ی یک میله‌ی حاوی مهره چند است؟

(الف) ۸ (ب) ۹ (ج) ۱۰ (د) ۱۱ (ه) ۱۲

۲۹- ماگ یک قورباغه در نقطه صفر روی محور X ها نشسته است. در اولین جهش، یک واحد به سمت چپ یا راست و در جهش i ام خود 3^{i-1} واحد به سمت چپ تا راست می‌جهد. این قورباغه به کدام نقطه از محور می‌تواند برسد؟

(الف) ۳۰۹ (ب) ۳۱۰ (ج) ۳۱۱ (د) ۳۱۲ (ه) ۳۱۳

۳۰- ماگ ۱۷ عدد مطابق شکل زیر در ۱۷ خانه به شماره‌های ۱ تا ۱۷ قرار گرفته‌اند. می‌گوییم عدد موجود در خانه‌ی j "پدر" عدد موجود در خانه‌ی i است، اگر $j = \lfloor \frac{i}{p} \rfloor$ باشد ($[x]$ برابر بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بزرگ‌تر نیست). روشن است که عدد موجود در خانه‌ی اول بی‌پدر است! اگر هر عدد از پدرش اکیداً کوچک‌تر باشد، این پدیده را مینیاتوری می‌نامیم. دقت کنید جدول زیر مینیاتوری است.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
۱۸	۱۶	۱۴	۱۵	۱۲	۱۰	۵	۴	۶	۷	۸	۹	۲	۳	۱	۳	۲

ما یکی از این اعداد را تغییر می‌دهیم. می‌خواهیم فقط با استفاده از تعدادی "عمل مجاز" دوباره اعداد را به صورت مینیاتوری در آوریم. عمل مجاز "جابه‌جایی یک عدد با پدرش" است.

اگر عدد ۱۸ (عدد اول) را به ۵ تغییر دهیم چند عمل مجاز لازم است؟

(الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۶

«پاسخنامه تشریحی»

۱- گزینه (ه) درست است.

ابتدا تعداد خانه‌های سیاه هر وجه را حساب می‌کنیم. در هر وجه $\left[\frac{7 \times 7}{2} \right]$ خانه‌ی سیاه وجود دارد که چون ۶ وجه وجود دارد در مجموع ۱۴۴ مکعب داریم. ولی مکعب‌هایی که روی ضلع ۳ تاست و چون ۱۲ ضلع داریم مجموعاً ۳۶ تاست. در نتیجه جواب مسئله برابر است با: $144 - 36 = 108$

۲- گزینه‌ی (ج) درست است.

فرض کنید که عدد یک به رنگ آبی باشد. در اینصورت کوچکترین عدد آبی بجز یک را در نظر بگیرید. از این عدد تا ۲۰ تمامی اعداد باید آبی باشند (چون جمع هر کدام با یک عدد بعدی را می‌سازد). در نتیجه بقیه اعداد نیز باید به رنگ قرمز باشند. اگر عدد دیگر آبی نداشته باشیم: یک حالت. اگر کوچکترین عدد آبی بزرگتر یا مساوی با ۴ باشد: حداقل دو عدد قرمز داریم که می‌توانند با مجموع خود اعداد بزرگتر قرمز بسازند و در نتیجه همان حالت اول خواهد بود. اگر کوچکترین عدد آبی برابر ۲ یا ۳ باشد: هر کدام از این حالات، یک حالت درست هستند. در مجموع سه حالت درست داریم، ولی چون فرض کرده بودیم عدد یک آبی است جواب مسئله دو برابر آن یعنی ۶ است.

۳- گزینه‌ی (الف) درست است.

چون هر دو عدد X و X ارقام یکسانی دارند (بجز تعداد صفرها)، پس مجموع ارقام و در نتیجه باقیمانده‌ی یکسانی به پیمانه‌ی ۹ دارند. پس تفریق آنها بر ۹ بخشپذیر است. در نتیجه تن‌ها رقمی که می‌تواند عدد نهایی را بر ۹ بخشپذیر کند ۵ است: $36 = 5 + 31$

۴- گزینه (ه) درست است.

عدد ۷ را از مجموعه حذف کنید. به ازای هر زیر مجموعه از مجموعه‌ی جدید دو حالت داریم: مجموع اعداد زوج باشد. در اینصورت اضافه کردن ۷ مجموع آن را فرد می‌کند. مجموع اعداد فرد باشد. در اینصورت اضافه کردن ۷ آن را زوج می‌کند. در نتیجه در هر حالت یک زیر مجموعه با مجموع زوج داریم. پس جواب مسئله ۱۲۸ است.

۵- گزینه (ج) درست است.

چون در ابتدا پرچم در دست نفر اول است و در انتهای مرحله اول به دست نفر سوم می‌رسد پس باقیمانده‌ی k بر ۲۰ و در نتیجه باقیمانده‌ی آن بر ۵ برابر ۲ است.

۶- گزینه (ج) درست است.

از ۶ مثلث داخلی تن‌ها می‌توان یکی از آنها را برداشت، چون در یک راس مشترک هستند. دو حالت را بررسی می‌کنیم:
 - دو مثلث از گوشه‌ها انتخاب شود: در اینصورت پس از انتخاب این دو، مثلث سوم بصورت یکتا از بین ۶ مثلث داخلی انتخاب می‌شود. در نتیجه تعداد حالات نهایی ۳ تا است.
 - سه مثلث از گوشه‌ها انتخاب شود: یک حالت بصورت یکتا تعیین می‌شود.
 با توجه به حالت بندی فوق مجموعاً ۴ حالت داریم.

۷- گزینه (د) درست است.

- همانند سوال قبلی براساس انتخاب تعداد مثلث‌های گوشه‌ای حالت بندی می‌کنیم:
- صفر مثلث از گوشه انتخاب شود: در این صورت باید سه مثلث از ۶ مثلث داخلی انتخاب شود که به دو حالت ممکن است.
 - یک مثلث از گوشه انتخاب شود: ابتدا به سه حالت می‌توان مثلث گوشه‌ای را انتخاب کرد. سپس ۵ مثلث داخلی باقی خواهند ماند که باید دو عضو غیر مجاور انتخاب شود. اینکار به ۶ طریق ممکن است. پس مجموعاً ۱۸ حالت بدست آمد.
 - دو مثلث از گوشه انتخاب شود: ابتدا به سه حالت می‌توان دو مثلث گوشه‌ای را انتخاب کرد. سپس چهار حالت برای انتخاب مثلث داخلی داریم. پس در مجموع ۱۲ حالت بدست می‌آید.
 - سه مثلث از گوشه انتخاب شود: این کار به یک حالت ممکن است.
 - پس در کل ۳۳ حالت وجود دارد که باقیمانده ی آن بر ۵ برابر ۳ است.

۸- گزینه (د) درست است.

- حرکت اسب در این ۸ خانه همانند یک دور کامل است. پس در هر مرحله باید سرباز را در خانه‌ای قرار دهیم که تا اسب ۴ خانه فاصله داشته باشد. در نتیجه مجموعاً 4×1387 حرکت انجام می‌شود که باقیمانده اش بر ۵ برابر ۳ است.

۹- گزینه (الف) درست است.

- مجموع مثلث‌های حاصل تشکیل یک دوزنقه می‌دهند که نقطه‌ی بالایی آن مشخص است. در نتیجه هر چه نقطه‌ی متصل به آن بالاتر باشد مساحت دوزنقه بیشتر خواهد شد. در نتیجه باید قطعه چوب با کمترین طول را آنجا قرار دهیم. پس جواب ۲ است.

۱۰- گزینه (د) درست است.

- با توجه به اینکه این ضلع عمودی یا افقی انتخاب شده باشد حالت بندی می‌کنیم:
- افقی: در اینصورت تن‌ها همان مسیری که شامل آن ضلع باشد حذف می‌شود. پس قیمت همگی آنها ۸ است.
 - عمودی: مجموعه‌ی قیمت حالاتی که از ضلع سمت چپ انتخاب شود با سمت راست برابر است. قیمت حالات حذف ضلع سمت چپ به ترتیب برابر است با ۱ تا ۸.
 - پس در نهایت قیمت جداول اعداد ۱ تا ۸ شدند که باقیمانده اش بر ۵ برابر ۳ است.

۱۱- گزینه (ب) درست است.

- فرض کنید در هر بار برخورد پرتو با آینه، بجای اینکه پرتو بازتاب شود، شکل را حول آینه‌ای که پرتو با آن برخورد کرده بچرخانیم. در نتیجه پرتو در همان جهت حرکت می‌کند ولی شکل حول مرکز خود 30° درجه چرخیده است. در نتیجه در کل 360° را به ۱۲ قطاع تقسیم کرده ایم که با ۶ خط تشکیل شده‌اند. پس هر پرتویی حداکثر ۶ بار با آینه‌ها برخورد می‌کند. برای ارائه مثال نیز هر پرتویی که با این ۶ خط برخورد کند این ویژگی را داراست.

۱۲- گزینه (ه) درست است.

- در صورتی که به ترتیب به بالا، راست، پایین و چپ حرکت کنیم، وجه پایین آن به ۵ تغییر می‌کند. در نتیجه با این روند می‌توان هر عددی را در وجه پایین قرار داد.
- حال روندی را ارائه می‌کنیم تا عددی که در ابتدا در پایین مکعب قرار دارد زمانی که به گوشه‌ی بالا راست رسیدیم به بالای آن منتقل شود: اگر به ترتیب ۲ بار راست، ۳ بار بالا، یکبار راست و یکبار بالا برویم در نهایت این اتفاق می‌افتد. با توجه به توضیحات بالا تمامی اعداد می‌توانند در بالای مکعب قرار گیرند.

۱۳- گزینه (ب) درست است.

هر فردی از اعضای M دوبار (به ازای پدر و مادر خود) در فرزندان حساب می‌شود (بجز اولین آدمیزاد) ولی چهار بار (به ازای پدر و مادر پدر و پدر و مادر مادر خود) در نوه‌ها محاسبه می‌شود (بجز اولین آدمیزاد و فرزندان). در نتیجه نسبت گفته شده بسیار نزدیک به ۲ خواهد بود.

۱۴- گزینه (د) درست است.

مجموع اعدادی که آنها دارند باید بر ۴ بخشپذیر باشد: $x + 3x = 4x$

چون باقیمانده‌ی مجموع اعداد بر ۴ برابر ۲ است باید عددی حذف شود که باقیمانده اش بر ۴ برابر ۲ باشد و تن‌ها عدد با این ویژگی ۱۴ است.

۱۵- گزینه (ه) درست است.

در صورتی که هیچ خانه‌ای سیاه نباشد تعداد روش‌های رسیدن به خانه‌ی آخر از رابطه‌ی بازگشتی زیر تبعیت می‌کند:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad f_1 = f_2 = 1$$

برای اثبات این ادعا کافی است حرکت نهایی را در نظر بگیریم. حرکت نهایی پرش به طول یک یا دو است که هر کدام از جملات بالا را می‌سازد.

از طرفی وقتی یک خانه‌ی سیاه وجود داشته باشد باید در آن حرکت دو خانه پرید. پس جواب مسئله را می‌توان به حاصلضرب قسمت‌هایی که خانه‌ی سیاه ندارند تجزیه کرد. در نتیجه جواب مسئله برابر است با $f_5 \times f_4 \times f_3 \times f_2$ که برابر با ۱۶۰ است.

۱۶- گزینه (د) درست است.

بهترین قیمت حتما یکی از اعدادی است که مورد نظر خریداران هستند. چون در غیر اینصورت با افزایش یک واحد به آن، تعداد متقاضیان تغییری نمی‌کند ولی سود هر ماشین افزایش می‌یابد.

پس کافی است تن‌ها به ازای همین اعداد نتیجه را بررسی کنیم. سود هر کدام به ترتیب برابر ۲۲، ۳۶، ۴۵، ۴۸، ۵۰، ۴۸، ۴۲، ۳۲، ۱۸ و ۱۰- است. در نتیجه بهترین قیمت ۱۸ است.

۱۷- گزینه (الف) درست است.

برای یافتن تعداد رشته‌های خوب از ابتدای رشته شروع می‌کنیم:

حرف اول ۳ حالت دارد و پس از آن در جایگاه‌هایی که توالی یکسان وجود دارد ۱ حالت برای پر کردن آن خانه داریم و در غیر اینصورت ۲ حالت (متمايز با قبلی) داریم. از طرفی باید سه جایگاه را که در آنها توالی یکسان خواهیم داشت را انتخاب کنیم. بجز جایگاه اول بقیه می‌توانند انتخاب شوند. پس جواب نهایی برابر است با:

$$\binom{9}{3} \times 2^6 \times 3 = 21 \times 3 \times 2^8$$

۱۸- گزینه (ه) درست است.

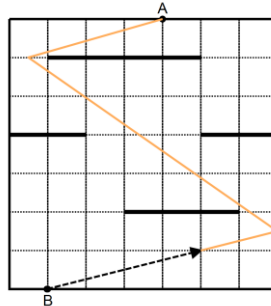
در صورتی که از عمل سه برابر استفاده نکنیم در نهایت دو عدد خواهیم داشت که توانی از ۲ هستند. پس تن‌ها اعدادی را می‌توانیم بسازیم که در بسط مبنای ۲ خود حداکثر دو رقم یک داشته باشند. پس $\Pi_{40} = 0$.

با توجه به اینکه عدد ۳۰ در بسط مبنای ۲ خود ۴ رقم یک دارد پس حداقل یکبار باید از عملیات سه برابر استفاده کند.

مثال «ابتدا اعداد ۲ و ۸ را می‌سازیم و آنها را با هم جمع می‌کنیم. حال عدد ۱۰ را با عملیات سه برابر به ۳۰ تبدیل می‌کنیم.

۱۹- گزینه (الف) درست است.

به کمک دو آینه همانند شکل می‌توان پرتو را به نقطه‌ی A رساند. همچنین از روی مسیر اولیه‌ی پرتو واضح است که نمی‌توان با یک آینه این کار را انجام داد (چون ناحیه‌ی قابل دید از نقطه‌ی A با مسیر پرتو اشتراکی ندارند).



۲۰- گزینه (د) درست است.

با توجه به شرایطی که مسئله توضیح داده است می‌توان تیم‌ها را به ترتیب قدرت مرتب کرد بطوری که هر تیمی رتبه‌اش بهتر باشد از تمامی تیم‌های با رتبه‌ی بالاترش قوی تر باشد و در بازی با آن برنده شود. تیم نایب قهرمان از تمامی ۸ تیمی که از آنها (مستقیماً یا با واسطه‌ی تیم دیگری) برده قوی تر است. پس رتبه‌ی این تیم حداکثر تهم است. از طرفی اگر تیم‌های نهم تا شانزدهم را بصورتی بچینیم که تا فینال با هم مسابقه دهند، مثالی را ارائه کرده ایم که تیم نایب قهرمان نهم بوده است. پس جواب مسئله نهم است.

۲۱- گزینه (د) درست است.

در صورتی که از شهر A شروع به حرکت کنیم، در هر مرحله در جهت مثبت یا منفی باید اختلاف ساعت را محاسبه کنیم و قدر مطلق نهایی اختلاف شهر E با شهر A خواهد بود. با توجه به این نکات در بین گزینه‌ها تنها عدد ۷ قابل ساخت نیست:

$$-5 - 4 + 3 + 7 = 1$$

$$-5 + 4 - 3 + 7 = 3$$

$$+5 - 4 - 3 + 7 = 5$$

$$-5 + 4 + 3 + 7 = 9$$

۲۲- گزینه (ج) درست است.

دو مقدار X و Y به ترتیب برابرند با ۴۹- و ۶۰ حال بین این دو عدد، اعداد ۱ تا ۱۰ قابل ساخت نیستند، ولی بقیه‌ی اعداد را می‌توان بدست آورد.

۲۳- گزینه (ب) درست است.

اگر همسایه‌های هر حرف را بشماریم، حرف A, D, E, H, I سه همسایه و حروف B, C, F, G دو همسایه دارند. در نتیجه چهار حرفی که تنها دو همسایه دارند در گوشه‌های جدول هستند و همسایه‌های آنها نمی‌توانند خانه‌ی وسط جدول باشند. با دقت در این موضوع حروف A, E, H, I حذف می‌شوند. پس حرف D در وسط جدول وجود دارد.

۲۴- گزینه (ج) درست است.

در صورتی که $a = 5$ باشد، در هر جمع عدد یکان صفر یا پنج خواهد بود و رقم دهگان دیگر حاصلضرب عددی بین صفر تا چهار. در نتیجه هیچ گاه حاصل جمع بزرگتر از ۹ نخواهد شد و نیازی به ده بر یک نداریم.

۲۵- گزینه (ه) درست است.

تنها شرطی که در این دنباله‌ی به طول ۶ داریم این است که تعداد حرکات شماره‌ی یک و دو باهم برابر باشند. در نتیجه تعداد حالات ممکن در صورتی که تعداد حرکات شماره‌ی یک بین صفر تا سه باشد به ترتیب برابر است با:

$$\binom{6}{6}, \binom{6}{4}, \binom{6}{2}, \binom{6}{0} \quad \text{که جمع این اعداد برابر می شود با ۱۴۱.}$$

۲۶- پاسخ در میان گزینه‌ها نیست.

با توجه به اینکه مجموعاً ۱۰۲۴ نقطه داریم و هر خط روی حداقل ۶۲ نقطه قرار می‌گیرد حداکثر ۱۶ خط می‌توان رسم کرد. به عنوان مثال نیز می‌توان خطوط را پشت سرهم قرار داد تا شرایط را برقرار کنند.

۲۷- گزینه (الف) درست است.

عدد ۲۱۲۱ بر ۷ بخشپذیر است و شرایط مسئله را نیز دارد. در نتیجه $A \leq 2121$ پس A ۴ رقمی است.

۲۸- گزینه (ج) درست است.

اولین نکته‌ای که باید به آن دقت کنیم این است که ترتیب انجام عملیات در حالت نهایی تفاوتی ایجاد نمی‌کند (چرا؟). با این فرض از میله‌ی شماره‌ی یک شروع می‌کنیم تا اینکه دیگر نتوانیم حرکتی روی آن انجام دهیم.

بدین ترتیب پس از تعدادی مرحله در میله‌ی دوم $\frac{1387-1}{2} = 693$ مهره خواهیم داشت. همین کار را با میله‌ی بعدی انجام می‌دهیم. تعداد مهره‌های میله‌ها همانند زیر خواهند شد:

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 20 \rightarrow 42 \rightarrow 85 \rightarrow 172 \rightarrow 346 \rightarrow 693$$

در نتیجه آخرین میله‌ی حاوی مهره، شماره‌ی دهم است.

۲۹- گزینه (ب) درست است.

می‌دانیم در گام آخر باید به سمت راست حرکت کنیم (در غیر اینصورت عدد نهایی منفی خواهد شد). در نتیجه قورباغه باید $3^5 = 243$ واحد در جهت مثبت ببرد. قبل از این حرکت اعداد برابر با ۶۶ تا ۷۰ هستند. به همین ترتیب قورباغه در مرحله قبل از آن نیز ۸۱ واحد در جهت مثبت حرکت کرده بود، در نتیجه در گام قبلی اعداد برابر با ۱۵- تا ۱۱- بوده. به همین ترتیب باید ۲۷ واحد در جهت منفی حرکت می‌کرده که نتیجه‌اش اعدادی بین ۱۲ تا ۱۶ خواهند بود.

این اعداد را باید بتوانیم به کمک ۱، ۳ و ۹ بسازیم که واضح است تن‌ها می‌توان عدد ۱۳ را ساخت که همان عدد ۳۱۰ در ابتدا است.

۳۰- گزینه (ب) درست است.

برای جابجایی هر عدد دو انتخاب داریم (هر پدری دو فرزند دارد). اگر با فرزندی که کوچکتر است جابجا کنیم همچنان توازن برقرار نخواهد شد (چون فرزند کوچکتر از فرزند بزرگتر، کوچک است). در نتیجه همواره باید با فرزند بزرگتر جابجایی صورت بگیرد. در نتیجه باید در گام اول با ۱۶، سپس با ۱۵ و در نهایت با ۶ جابجا کنیم. پس سه حرکت لازم و کافی است.